Chambre de Commerce et d'Industrie de Paris

DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT

SERVICE DES CONCOURS ET EXAMENS

École Supérieure de Commerce de Paris

CONCOURS D'ADMISSION DE 1983

Mathématiques II

TOUTES OPTIONS

Mercredi 18 Mai 1983, de 14h. à 17h.

EXERCICE I :

A/ Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie comme suit :

si $x \leqslant 0$ ou $x \geqslant 1$, $f(x) = 0$;

si $0 < x < 1$, $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$

1) Soient a et b deux nombres réels tels que : $0 < a \leqslant b < 1$;

établir l'égalité :

$$\int_a^b f(t)dt = 2(\text{Arcsin}\sqrt{b} - \text{Arcsin}\sqrt{a})$$

2) En déduire l'existence et la valeur de $\int_0^1 f(t)dt$;

pouvait-on prévoir la convergence de cette intégrale ?

3) comment faut-il choisir la constante k réelle, pour que la fonction kf soit la densité de probabilité d'une variable aléatoire réelle?

B/ La constante k ayant la valeur trouvée à la question précédente, on pose :

$g = kf$, et on désigne par X une variable aléatoire réelle de densité g

1) Construire, relativement à un repère orthonormé, la représentation graphique de g.

2) Déterminer G, fonction de répartition de X et construire de même sa représentation graphique.

Comment sont liés les deux nombres G(x) et G(1-x) ?

Que vaut $P(X < 0,5)$?

. . . / . . .

3) Déterminer le développement limité, à l'ordre 5, au voisinage de 0 de la fonction $x \mapsto \text{Arcsin}x$.

En déduire une valeur approchée de G(0,1) .

4) Soit t un réel quelconque. Déterminer suivant la valeur de t la probabilité de l'événement $(\text{Arcsin}\sqrt{X} \leqslant t)$, en distinguant les 3 cas :

$t < 0$

$0 \leqslant t \leqslant \pi/2$

$\pi/2 < t$

Soit H(t) cette probabilité; montrer que H est la fonction de répar-tition d'une variable aléatoire réelle.

EXERCICE II :

Soit N un entier naturel strictement supérieur à 1. Toutes les matrices considérées sont des matrices carrées d'ordre N, à coefficients dans $\mathbb{C}$, dont les lignes et les colonnes sont numérotées de 0 à N-1 .

Soit $A = (a_{jk})$ une telle matrice: a_{jk} est l'élément appartenant à la ligne j et à la colonne k. $\overline{A} = (\overline{a_{jk}})$ est la matrice ayant pour éléments les conjugués des éléments de A.

1°/ Soit $F = (f_{jk})$ la matrice définie par :

$$f_{jk} = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{2i\pi jk/N} \quad , \quad (i^2=-1 \ , \ 0 \leqslant j \leqslant N-1 \ , \ 0 \leqslant k \leqslant N-1)$$

a) Montrer que, pour tous j et k, $0 \leqslant j \leqslant N-1$ et $0 \leqslant k \leqslant N-1$,

$$\sum_{q=0}^{N-1} f_{jq}\overline{f_{qk}}$$ vaut 1 si j=k et 0 si $j \neq k$.

b) En déduire la valeur de $F.\overline{F}$. F est-elle inversible ? quel est son inverse ?

c) Etablir la relation, valable pour $1 \leqslant j \leqslant N-2$ et $0 \leqslant k \leqslant N-1$:

$$f_{j-1,k} + f_{j+1,k} = 2f_{jk}.\cos(2k\pi/N) \ .$$

2°/ soient α et β deux complexes et $A = (a_{jk})$ la matrice définie par :

$a_{jj} = \alpha$, $0 \leqslant j \leqslant N-1$

$a_{j,j-1} = a_{j,j+1} = \beta$, $1 \leqslant j \leqslant N-2$

$a_{0,1} = a_{0,N-1} = a_{N-1,0} = a_{N-1,N-2} = \beta$

tous les autres coefficients sont nuls.

a) Montrer que les vecteurs colonnes $C_0, C_1, C_2, \ldots, C_{N-1}$ de F sont des vecteurs-propres de A. Quelle est la valeur propre associée à C_k ?

b) Qu'en déduit-on pour la matrice $D = \overline{F}AF$?

3°/ Application : on pose N=4 , $\alpha=1$, $\beta=2$

a) expliciter F.

b) A étant la matrice définie à la question 2 , déduire des résultats précédents la résolution de l'équation matricielle :

$$AX = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

où X désigne une matrice-colonne.